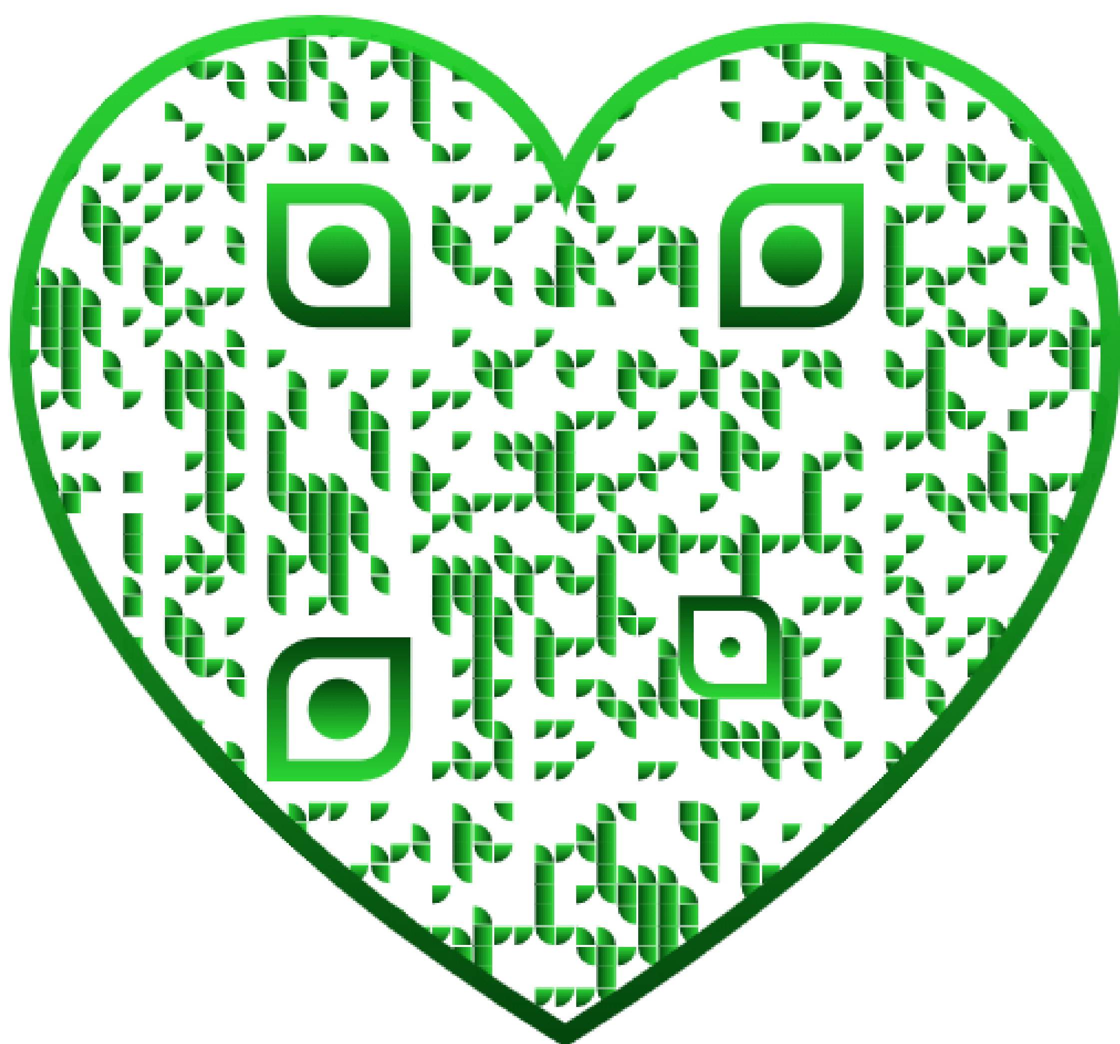
Estratégia
Concursos

Aula 05

Resumos para Concursos

Autor:

05 de Dezembro de 2023



Bizu Estratégico de Estatística

ANÁLISE ESTATÍSTICA

Pessoal, segue abaixo uma análise estatística dos assuntos mais exigidos no âmbito da disciplina de Estatística, com base nas principais Bancas: FCC, FGV e Cebraspe.

Assunto	% de cobrança
Probabilidade	29,03%
Estimação Pontual e Intervalar. Teoria da Amostragem	16,13%
Análise Combinatória	12,90%
Medidas de Variabilidade ou de Dispersão	9,68%
Médias	9,68%
Distribuições Discretas de Probabilidade	9,68%
Apresentação de Dados	3,23%
Moda	2,82%



Com essa análise, podemos verificar quais são os temas mais exigidos e, através disso, focaremos nos principais pontos em nossa revisão!

Assunto	Bizu
Apresentação de Dados	1 a 8
Média	9 a 16
Moda	17 a 19
Medidas de Variabilidade ou de Dispersão	20 a 24
Probabilidade e Análise Combinatória	25 a 33
Distribuições Discretas de Probabilidade	34 a 43
Estimação Pontual e Intervalar.	44 a 47



Apresentação de Dados

1. Estatística Descritiva x Estatística Inferencial

- A Estatística é um ramo da Matemática Aplicada, intimamente relacionada a coleta, organização, apresentação, análise e interpretação de dados. Divide-se basicamente em dois ramos:

- Estatística Descritiva: responsável pela "parte inicial", ou seja, coletar, organizar e descrever os dados.

- Estatística Inferencial: responsável pela "parte final", pegar os "dados prontos" e realizar inferências, ou seja, analisá-los e interpretá-los para se tirar conclusões.



ESTATÍSTICA DESCRITIVA	ESTATÍSTICA PROBABILÍSTICA	ESTATÍSTICA INFERENCIAL
É responsável pela coleta, organização, descrição e resumo dos dados observados.	É responsável por estabelecer o modelo matemático adotado para explicar fenômenos aleatórios.	É responsável pela análise e interpretação dos dados.

- O objetivo da estatística é justamente aplicar determinadas metodologias para "extrapolar" os dados analisados e obter informações sobre algo maior.

2. Censo x Amostra / Parâmetro x Estimador

- Quando estamos fazendo algum estudo estatístico, temos a População, um conjunto do qual fazem parte todos os elementos que interessam para a situação. Por exemplo, se queremos saber a média de filhos que as mulheres brasileiras têm, a população seria composta por todas as mulheres brasileiras.

- Um Censo acontece quando coletamos os dados de todos os elementos da população. Frequentemente é um procedimento caro, demorado ou até mesmo inviável. Os dados de uma população são chamados de parâmetros populacionais.

- Uma Amostra é uma parte da população. Com as técnicas corretas, é possível obter resultados precisos sobre a população de uma forma mais barata e rápida. Na situação do exemplo, poderíamos estudar uma parcela das mulheres brasileiras e chegar a resultados satisfatórios a respeito da população. Os dados de uma amostra são chamados de estimadores.

- Parâmetros e Estimadores são coisas diferentes, e consequentemente são representados de forma diferente. Por exemplo:

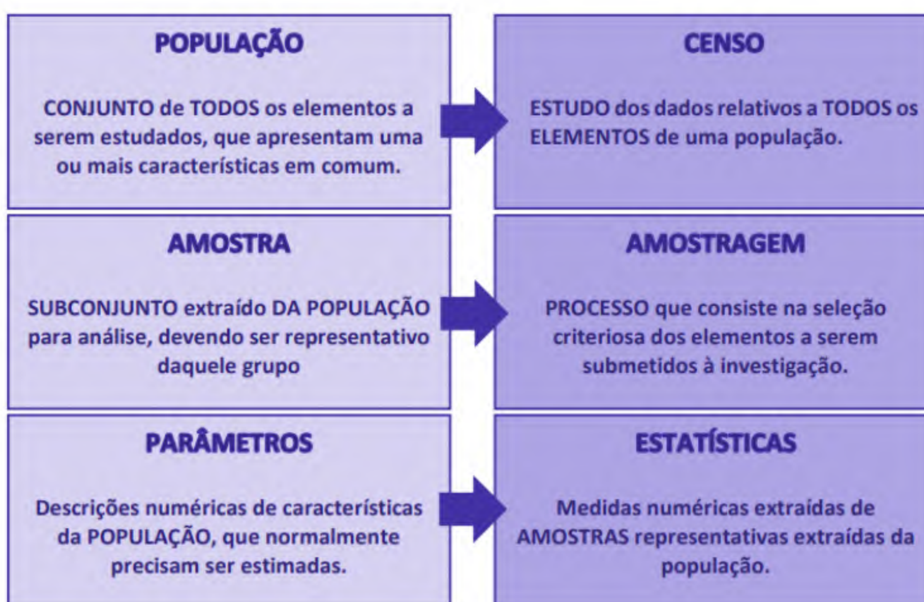
$$\overline{X} \rightarrow \textit{média amostral (estimador)}$$
$$\mu \rightarrow \textit{média populacional (parâmetro)}$$

- O Parâmetro é geralmente um valor fixo, já o estimador varia de acordo com a amostra estudada.

- As ESTATÍSTICAS são MEDIDAS NUMÉRICAS OBTIDAS DE AMOSTRAS representativas extraídas da população. A partir das informações colhidas da amostra, as estatísticas amostrais obtidas podem ser utilizadas para inferir ou

tirar conclusões acerca dos parâmetros populacionais, como a proporção de homens e mulheres na população brasileira. De forma resumida, as estatísticas (ou estimadores) são descrições numéricas de características amostrais. Normalmente, as estatísticas amostrais diferem de uma amostra para outra.





3. Dados Brutos x Rol

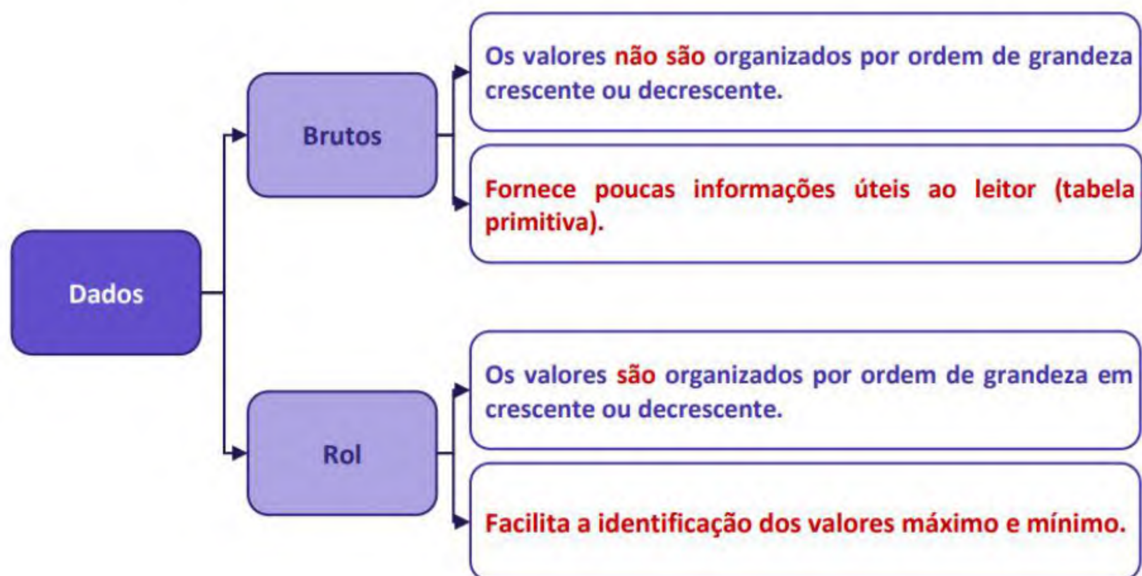
- Dados Brutos são os dados desorganizados de uma pesquisa. Se colocados em uma tabela, esta é chamada de Tabela Primitiva.

- Ao organizar os Dados Brutos em ordem **crescente** ou **decrescente**, estaremos diante de um **Rol**.

- Este procedimento da Estatística Descritiva pode parecer despretensioso, mas



veremos que algumas conclusões e procedimentos dependerão de os dados estarem organizados dessa forma.



4. Frequência Absoluta e Frequência Relativa

- Observe a seguinte sequência de dados:

1 2 3 3 3 4 7 10 12 12

- Observe que alguns dados aparecem mais de uma vez, com isso podemos montar a seguinte tabela:

DADO	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA	FREQUÊNCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FREQUÊNCIA RELATIVA ACUMULADA
1	1	10%	1	10%
2	1	10%	2	20%
3	3	30%	5	50%
4	1	10%	6	60%

7	1	10%	7	70%
10	1	10%	8	80%
12	2	20%	10	100%
TOTAL	10	100%	10	100%

- A Frequência Absoluta corresponde ao número de vezes que o dado aparece na sequência:

$$F_{Abs_i} = n_i$$

- A Frequência Relativa corresponde a frequência absoluta dividida pelo número de elementos na sequência:

$$F_{Rel_i} = \frac{F_{Abs_i}}{n}$$

- As frequências acumuladas somam à frequência "normal" as frequências dos valores anteriores ao valor em questão.

5. Intervalos de Classes

- Podemos expandir o agrupamento para considerar intervalos de valores. Se por um lado simplificamos os dados, também perdemos algumas informações, para os dados mostrados anteriormente, poderíamos fazer:

INTERVALO	FREQUENCIA ABSOLUTA
0 ⊢ 3	2
3 ⊢ 6	4
6 ⊢ 9	1
9 ⊢ 12	1

$12 \vdash 15$	2

- Observe que o símbolo $\vdash$ significa que estamos incluindo o valor da esquerda e excluindo o valor da direita na contagem da frequência. Ou seja, o intervalo é fechado na esquerda e aberto na direita.

Tipo de Intervalo	Notação matemática	Notação estatística	Significado
Intervalo aberto	$a < x < b$	$a - b$	Engloba todos os elementos entre a e b, mas não engloba a nem b.
Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita	$a \leq x < b$	$a \vdash b$	Engloba todos os elementos entre a e b, inclusive a mas não b.
Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita	$a < x \leq b$	$a \dashv b$	Engloba todos os elementos entre a e b, inclusive b mas não a.
Intervalo fechado	$a \leq x \leq b$	$a \vdash\!\dashv b$	Engloba todos os elementos entre a e b, inclusive a e b.

6. Densidade de Frequência

- Esse é um conceito pouco comum de aparecer, mas entendendo (ou decorando) sua fórmula, você pode acertar uma questãozinha e se destacar da concorrência:

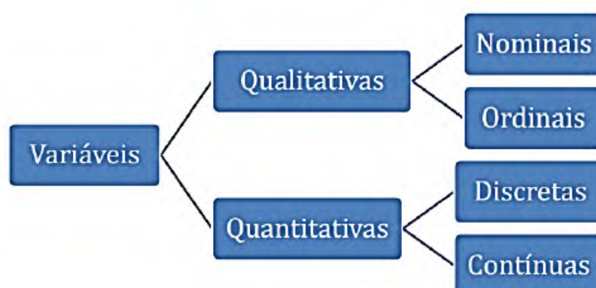
$$Densidade\ de\ frequência = \frac{frequência}{amplitude}$$

- A **amplitude refere-se a diferença entre o limite superior e inferior** da classe. No nosso exemplo:

$$D_1 = \frac{2}{3-0} = \frac{2}{3} \qquad D_2 = \frac{4}{6-3} = \frac{4}{3} \ .....$$

7. Variáveis

- Uma variável é o conjunto dos possíveis resultados esperados em um "experimento". Por exemplo, se a variável X representa os possíveis resultados de sexo de um recém-nascido, seus valores poderiam ser "Masculino" ou "Feminino". As variáveis podem ser:



- Qualitativa: seus possíveis valores não são números, mas atributos. Por exemplo Masculino/Feminino, ou Pequeno/Médio/Grande.

✓ No primeiro exemplo temos uma Variável Qualitativa **Nominal**, pois **não há como estabelecer uma ordem** entre os valores.

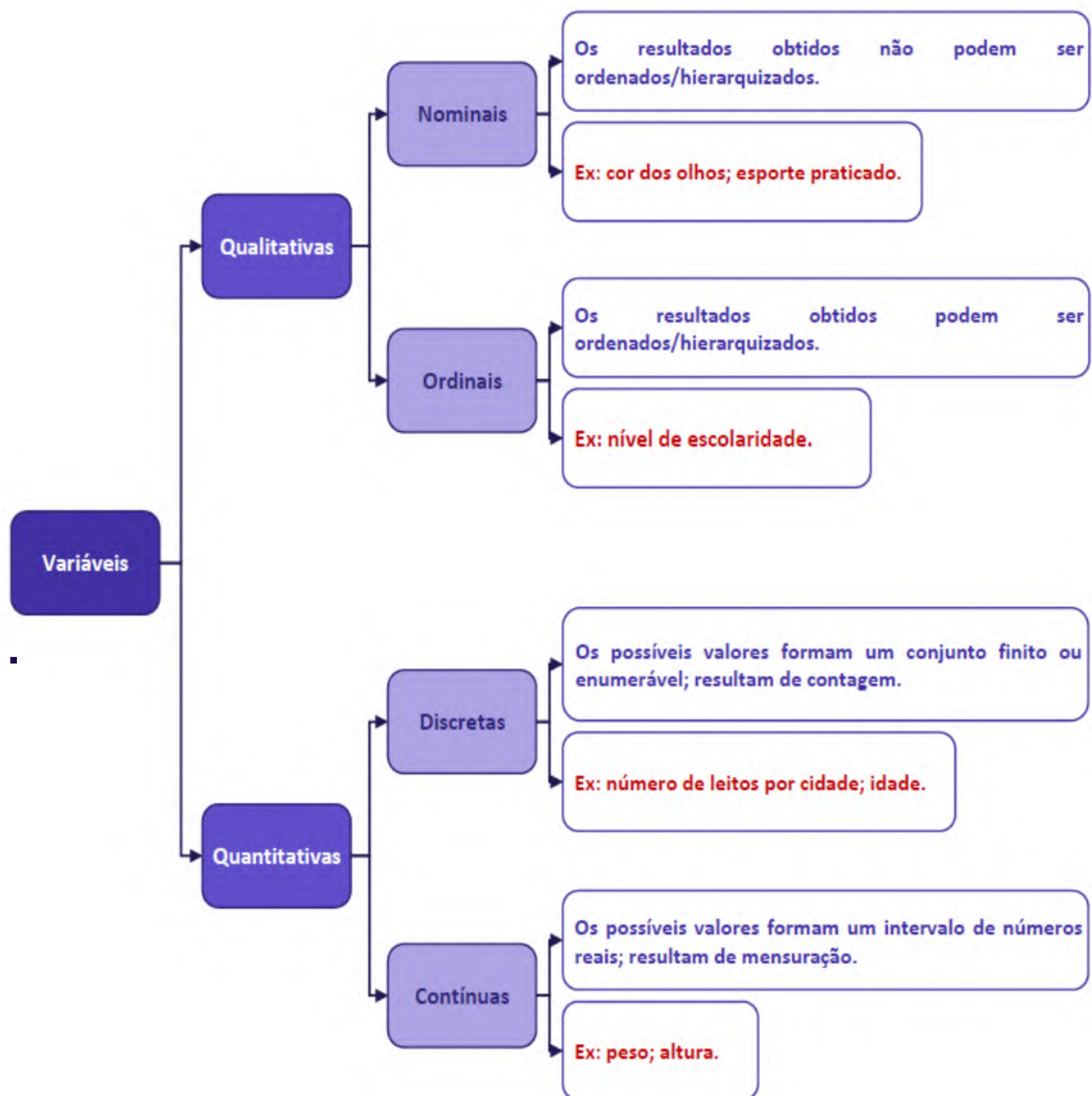
✓ No segundo caso temos uma Variável Qualitativa **Ordinal**, pois **é possível "ordenar"** seus valores.

- Quantitativa: seus possíveis valores são números.

✓ **Discretas**: quando podem assumir apenas valores dentro de um **conjunto enumerável**. (Ex: números naturais, números ímpares, números múltiplos de 0,5...). Cuidado, variáveis discretas também podem assumir infinitos valores, em alguns casos.



✓ **Contínuas**: quando podem assumir **qualquer valor em intervalos reais**.



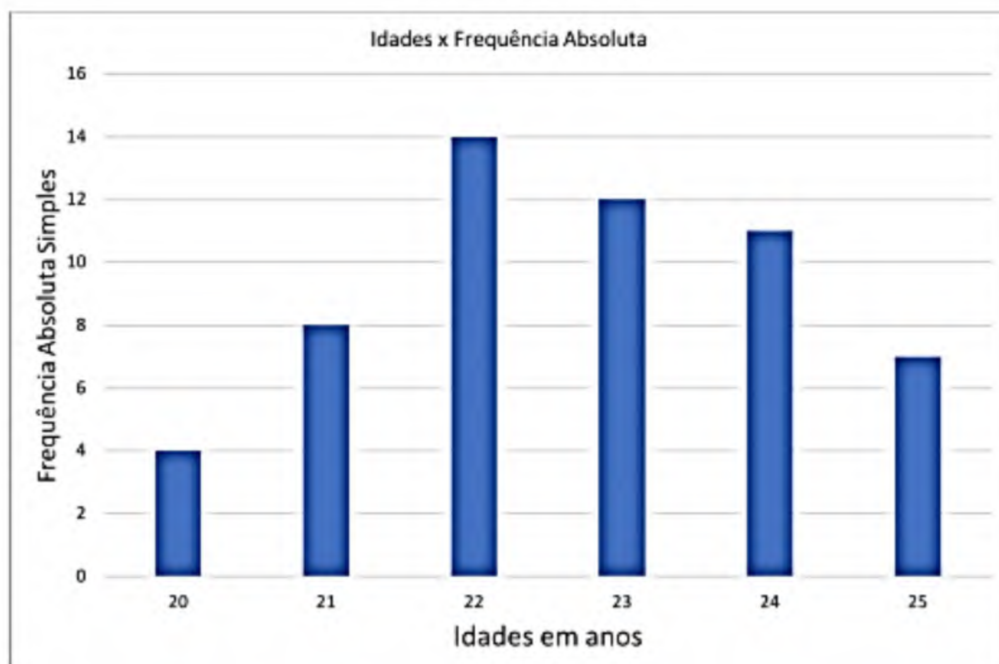
8. Interpretação de Gráficos

- Um aspecto importante não só para provas de Estatística, é saber interpretar gráficos. Não é um assunto fácil para ensinar por um "bizu", é algo que se



aprende continuamente. Mas chamo atenção para uma diferença importante, que pode te confundir:

✓ Gráfico de barras/colunas justapostas é frequentemente utilizado para dados discretos ou atributos:



✓ Histograma é frequentemente utilizado para dados contínuos, "o valor onde "encerra" uma barra, inicia a próxima":

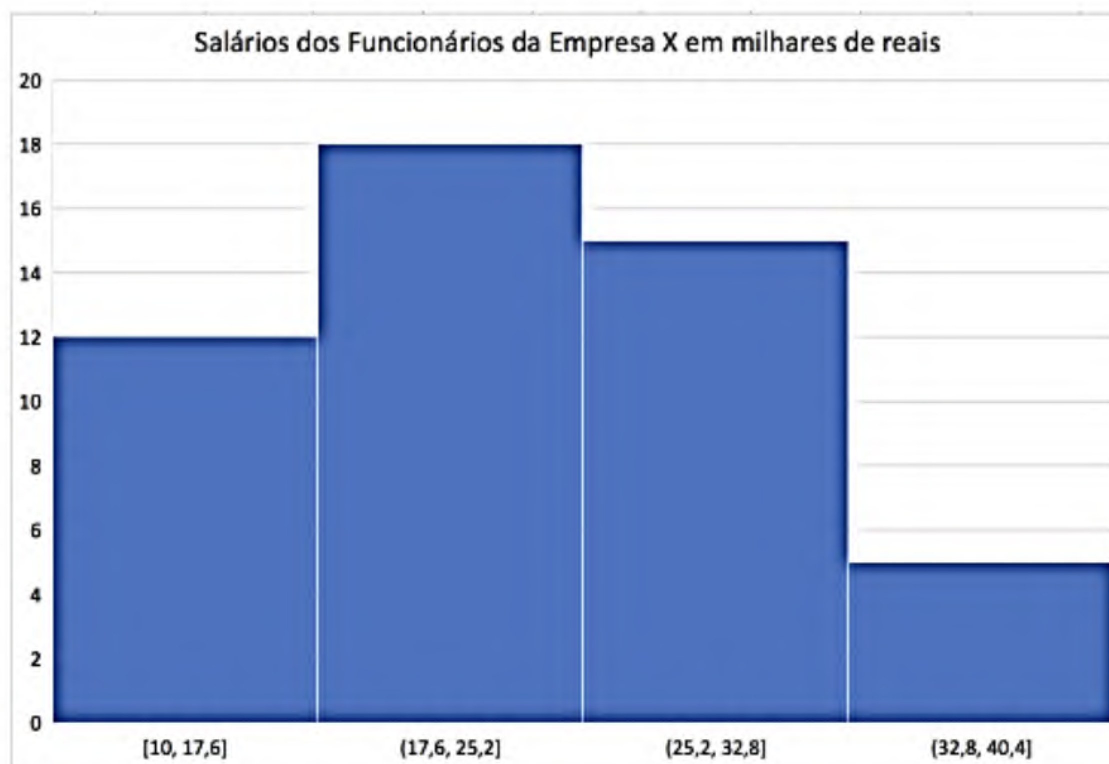

Salários dos Funcionários da Empresa X em milhares de reais
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
[10, 17,6]
(17,6, 25,2]
(25,2, 32,8]
(32,8, 40,4]

Gráfico	Definição
	O **gráfico de hastes ou bastões** é muito utilizado para representar dados não agrupados em classes, o que normalmente ocorre com **dados discretos**.
	O **histograma** é um gráfico destinado a representar **dados agrupados em classe**, sendo composto por um conjunto de **retângulos contíguos (justapostos).**
	A **poligonal característica** é construída utilizando apenas os **contornos do histograma**.
	O **polígono de frequências** é um gráfico em linha **obtido por meio da ligação, por segmentos de reta, dos pontos médios** das bases superiores dos retângulos de um histograma.

Média

9. Medidas de Posição

- As **medidas de posição** são estatísticas que caracterizam o comportamento dos elementos de uma **série de dados**, orientando quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de frequência.

- **Medidas de tendência central**: representam o ponto central ou o valor típico de um conjunto de dados, indicando onde está localizada a maioria dos valores de uma distribuição. As medidas mais utilizadas são:

  ✓ **Média aritmética**: é a medida de posição mais utilizada, sendo o valor resultante da divisão entre a soma de todos os valores de uma série de observações e o número de observações;

  ✓ **Mediana**: valor que ocupa a posição central de uma série de observações, quando organizadas em ordem crescente ou decrescente; e

  ✓ **Moda**: valor mais frequente em uma série de observações, ou seja, o que aparece o maior número de vezes dentro de um conjunto de valores observados.

- **Medidas separatrizes**: dividem (ou separam) uma série em duas ou mais partes, cada uma contendo a mesma quantidade de elementos. As medidas mais utilizadas são:

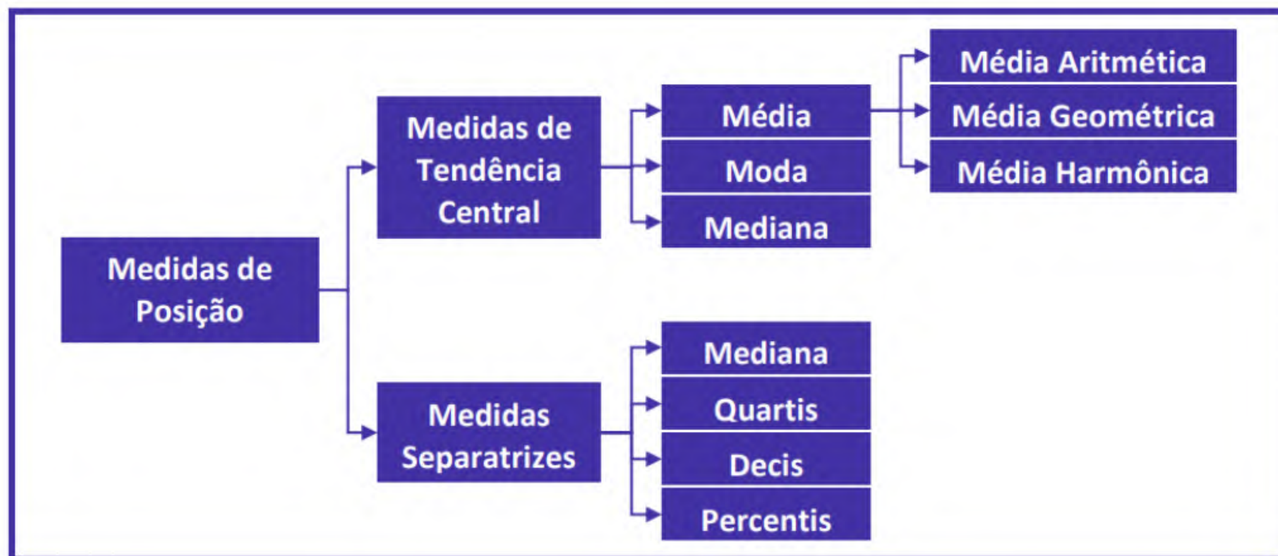
✓ **Mediana**: divide uma série em duas partes iguais. Reparem que, além de ser uma medida separatriz, a mediana também é uma medida de tendência central;

✓ **Quartis**: dividem uma série em quatro partes iguais;



✓ **Decis**: dividem uma série em dez partes iguais; e

✓ **Percentis**: dividem uma série em cem partes iguais.



10. Somatório e suas Propriedades

- O somatório é uma importante ferramenta para simplificar a escrita de adições. Seu símbolo é o ∑. Geralmente o somatório tem essa "cara":

$$\sum_{i=1}^{10} a_i$$

- O termo a_i representa o termo que está sendo somado. O índice i, indicado abaixo do somatório, inicia em 1 e termina em 10 (mostrado acima). Assim esse somatório equivale a:



$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}.$$

- As duas principais propriedades do somatório são:

✓ Podemos "quebrar" somas internas:

$$\sum(a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$$

✓ Podemos "retirar" multiplicadores internos:

$$\sum(ka_i) = k \cdot \sum(a_i)\text{, sendo } k \text{ uma constante real.}$$

11. Média Aritmética

- Essa medida é definida como o QUOCIENTE entre a SOMA DE TODOS OS ELEMENTOS e o NÚMERO DELES. A propriedade principal da média é preservar a soma dos elementos de um conjunto de dados.

- A média aritmética é um valor que substitui todos os elementos de uma sequência, mantendo seu somatório. É comumente representado por $\overline{x}$. Sua fórmula é:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

✓ Ou seja, basta somar todos os termos, e dividir pela quantidade de termos.

✓ As principais propriedades da média aritmética são:

✓ Ela **sempre existe**, e é **única**.

✓ Ela sempre será igual ou inferior ao maior termo da sequência, e igual ou superior ao menor termo:

$$m \leq \overline{x} \leq M,$$

✓ será igual apenas quando todos os valores da sequência forem iguais.

✓ **Somando-se** (ou subtraindo-se) a mesma constante **a todos os termos** da sequência **a média é aumentada** (ou diminuída) desse valor.

✓ **Multiplicando-se** (ou dividindo-se) uma constante por **todos os termos** da sequência, **a média é multiplicada** (ou dividida) por esse número.

12. Média Ponderada ou Média com Frequências

- Uma média ponderada é a média de um conjunto de dados cujos valores possuem pesos variados.

- Na **média ponderada**, alguns termos da sequência "**pesam**" mais do que os outros. Por exemplo: você faz duas provas, mas sua nota final não é simplesmente a média aritmética das duas, a segunda prova tem "peso 2" (e a primeira, "peso 1").

- A Média Ponderada tem a seguinte Fórmula:

$$\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

- Onde p_i é o peso referente ao termo i

- Para dados agrupados por Valor, a frequência desempenha papel semelhante ao do "peso".

- Resumindo:


A média ponderada pode ser calculada por meio das seguintes etapas:


Multiplicamos os valores por seus respectivos pesos.


Somamos as operações de multiplicação da etapa anterior e guardamos o resultado.


Dividimos o resultado pela soma dos pesos.

13. Média para dados Agrupados por Classe

- Aqui, antes de calcular a média exatamente como mostramos nos tópicos anteriores, precisamos primeiro "trocar" o intervalo por um valor, para isso fazemos a média dos limites do intervalo. Por exemplo, o intervalo 10 ⊢ 20 "assumiria" o valor 15.

14. Geométrica

- A média geométrica é uma medida estatística muito utilizada em situações de acumulação de percentuais, fato muito comum em problemas financeiros.

- Essa medida é definida, para o conjunto de números positivos, como a raiz n-ésima do produto de n elementos de um conjunto de dados. A propriedade principal dessa média é preservar o produto dos elementos de um conjunto de dados.

- A Média Geométrica, em vez de preservar o somatório de uma sequência de termos, preserva o produto desses valores. Sua fórmula é:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

15. Média Harmônica

- A média harmônica é muito utilizada quando precisamos trabalhar com grandezas inversamente proporcionais. É o caso de problemas clássicos, como o cálculo da velocidade média de um automóvel ou da vazão de torneiras (quanto tempo duas ou mais torneiras levam para encher um tanque).

- Essa medida é definida, para o conjunto de números positivos, como o inverso da média aritmética dos inversos. A propriedade principal dessa média é preservar a soma dos inversos dos elementos de um conjunto de números.

- A Média Harmônica preserva a soma dos inversos dos números de uma sequência. Sua fórmula é:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

16. Desigualdade das Médias

- Se os valores de uma sequência forem iguais, as três médias serão iguais. Se pelo menos um for diferente teremos a seguinte desigualdade: $\bar{x} > G > H$. Ou seja, **a média aritmética é maior que a média geométrica que é maior que a média harmônica**.



Moda

17. Conceitos Iniciais

- A moda é aquele valor (ou valores) que aparecem com maior frequência em um determinado conjunto de elementos. Cuidado, pois a moda é o valor e não a maior frequência. Podemos classificar o conjunto em 3 tipos:

✓ Umimodal: a moda é única, apenas um valor aparece mais vezes.

✓ Plurimodal (ou polimodal): a moda é múltipla, vários valores compartilham a mesma frequência, e ela é a máxima.

✓ Amodal: não há moda, todos os valores possuem a mesma frequência.

18. Moda de Pearson

- Em raras ocasiões, a questão solicita que seja calculada a moda de Pearson. Sua fórmula é a seguinte:

$$M_o = 3 \cdot M_d - 2\overline{x}$$

- Observe que, neste caso, a moda é calculada em função da Mediana (M_d) e da Média ($\overline{x}$).

19. Moda Bruta, de Czuber e de King

- A situação se complica um pouco quando os valores dos dados estão

agrupados em classes. É simples descobrir qual classe possui a maior frequência (classe modal), entretanto não é tão evidente qual valor, dentro do intervalo da classe, deve ser considerado a moda. Para se chegar a um valor pontual, existem 3 procedimentos distintos:

- Moda Bruta: adota-se simplesmente o ponto médio da classe modal.

- Moda de Czuber: a moda dependerá das frequências das classes imediatamente antes e depois da classe modal, bem como da frequência da classe modal. Se a frequência da classe anterior for maior do que a da classe posterior, a moda será "puxada" mais para perto do limite inferior da classe modal. E vice-versa. Se as frequências forem iguais, a moda será exatamente o ponto médio.

- Moda de King: semelhante a moda de Czuber, mas a frequência da classe modal não entra na fórmula.

- Vamos para um exemplo, vai facilitar bastante as coisas. Imagine a seguinte situação:

INTERVALO	FREQUENCIA ABSOLUTA
3 ⊢ 6	15
6 ⊢ 9	25
9 ⊢ 12	5

✓ Primeiramente identificamos a classe modal: é a segunda (6 ⊢ 9) pois tem a maior frequência absoluta.

✓ A Moda Bruta é simplesmente o ponto médio dela, ou seja 7,5.

✓ A moda de Czuber é definida pela fórmula:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_M - f_{ant}}{(f_M - f_{ant}) + (f_M - f_{post})}\right] \cdot h$$

✓ Substituindo os valores: $M_o = 6 + \left[\frac{25-15}{(25-15)+(25-5)}\right] * 3 = 7$

✓ A moda de King é definida pela fórmula:

$$M_o = l_i + \left[\frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}}\right] \cdot h$$

✓ Substituindo os valores: $M_o = 6 + \left[\frac{5}{15+5}\right] * 3 = 6,75$

✓ Observe que como a frequência da classe anterior é maior do que a da posterior, a moda foi "puxada" para mais perto de 6 (do que de 9).

✓ Podem existir outros intervalos de classe nos dados, mas a moda é apenas influenciada pelos imediatamente adjacentes.

✓ Se a classe modal for a primeira (ou a última) adotamos como frequência anterior (ou posterior) o valor zero.

Medidas de Dispersão

20. Conceitos Iniciais

- Também chamadas de Medidas de Variabilidade, procuram descrever o quão homogêneo ou não são os dados de um conjunto. São medidas que analisam o afastamento dos valores em uma sequência. Algumas são bem simples:

  ✓ Amplitude (Total): é a diferença entre o maior e menor número da sequência. Não considera nenhum outro valor. Para dados agrupados em classe, é a diferença entre o limite inferior da primeira classe, e o limite superior da última.

  ✓ Amplitude Interquartílica: é a diferença entre o Terceiro e Primeiro Quartil. Não confunda com desvio quartílico ou amplitude semi-quartílica, que são a metade desse valor.

21. Desvio

- O desvio é basicamente a diferença de um número, em relação a outro. É bastante comum, calcular a diferença de cada elemento X da sequência em relação à média desse conjunto de dados. Nesse caso particular, temos a seguintes consequências:

  ✓ A soma de todos os desvios em relação à média e nula.

  ✓ A soma dos quadrados dos desvios em relação à média é mínima, quando comparado aos desvios em relação a outros



números.

- Chamamos de Desvio Absoluto Médio a soma dos módulos de todos os desvios em relação a média, divididos pelo número de termos:

$$D_M = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n}$$

22. Variância e Desvio Padrão

- O Desvio Absoluto Médio dá uma boa ideia do grau de dispersão dos dados, mas a "operação módulo" não é algo fácil de se trabalhar na matemática. Para contornar o problema dos termos positivos e negativos se anularem, **quando calculamos o desvio em relação à média, podemos também elevar os desvios ao quadrado. Esse valor, chamamos de variância**:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

✓ O famoso **Desvio Padrão é simplesmente a raiz quadrada da variância**.

✓ É importante notar que há uma pequena diferença entre a Variância Populacional e Amostral, consequentemente os desvios também serão diferentes. Não cabe aqui explicar o motivo da diferença, apenas atente-se para as fórmulas:

Variância Populacional → $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Variância Amostral → $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$



✓ Para transformar de Populacional para Amostral basta multiplicar por (n/n-1)

✓ Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante a todos os elementos da série, nem o desvio padrão nem a variância mudam.

✓ Multiplicando (ou dividindo) uma constante c por todos os elementos da série, o desvio padrão fica multiplicado (ou dividido) por c e a variância por c^2.

23. Cálculo da Variância e Desvio Padrão

- Calcular a variância pelas fórmulas mostradas anteriormente pode ser bastante trabalhoso em alguns casos, há uma forma mais simples, e com muito mais chances de aparecer na sua prova:

$$\sigma^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$$

- É fundamental que você saiba usar essa fórmula: "a variância (populacional) é a média dos quadrados menos o quadrado da média". Imagine a sequência 1, 3, 4, 8.

  ✓ Média: (1+3+4+8) / 4 = 4, quadrado da média: 4^2 = 16.

  ✓ Soma dos quadrados: 1+ 9 + 16 + 64 = 90. Média dos quadrados: 90/4 = 22.5

  ✓ Variância Populacional: 22.5 - 16 = 6.5



- Variância Amostral: 6.5 * (4/3) = 8.667

24. Coeficiente de Variação e Variância Relativa

- Para avaliarmos a "relevância" do desvio padrão e variância, é interessante compará-los com a magnitude dos dados a que ele se refere. Por exemplo, um desvio padrão de 10 gramas em numa produção de pastas de dente pode ser relevante, mas na de sacos de cimento não. Para isso temos duas relações:

  - Coeficiente de Variação: $C_V = \frac{\sigma}{\bar{X}}$

  - Variância Relativa: $V_R = {C_V}^2$



Probabilidade e Análise Combinatória

25. Definições de Probabilidade

- A **Teoria da Probabilidade** é o ramo da Estatística que estuda experimentos e fenômenos aleatórios, cujos resultados são incertos. Como exemplo, podemos citar:

✓ Lançamentos de dados ou moedas;

✓ Seleções feitas ao acaso (ou aleatoriamente), como de uma carta no baralho, de uma pessoa ou peça dentro de um grupo, etc.;

✓ Fenômenos naturais, como chuva em determinado dia.

- **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

- **Evento** é todo subconjunto do espaço amostral.

Evento simples ou elementar → n(B) = 1

Evento impossível: C = ∅ → n(C) = 0

Evento certo: D = U → n(D) = n(U)

Definição Clássica de Probabilidade:

$$\boldsymbol{Probabilidade} = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis}$$

- Combinações de eventos:

  - União de dois eventos: Considere dois eventos A e B. O evento união ocorre se e somente se A ou B (ou ambos) ocorrerem.

  - A intersecção de dois eventos: Considere dois eventos A e B. O evento interseção ocorre se e somente se os dois eventos ocorrerem (A e B ocorrerem).

  - Complementar de um evento: Considere um evento A. O evento complementar de A ocorre se e somente se não ocorre A.

  - Se $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}$, dizemos que A e B são eventos exclusivos.

  - Se $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou excludentes).

  - Definição Axiomática de Probabilidade:

    - $P(A) \geq 0$

    - $P(U) = 1$

    - Se A e B são eventos **mutuamente excludentes** $(A \cap B = \emptyset)$, então $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.



Eventos A e B Mutuamente Excludentes: P(A ∩ B) = P(∅) = 0

Probabilidade da **União** (caso geral): **P(C ∪ D) = P(C) + P(D) – P(C ∩ D)**

Probabilidade da **União de Eventos Excludentes: P(A ∪ B) = P(A) + P(B)**

Probabilidade **Complementar:** $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Interseção dos complementares = **complementar** da união:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

União dos complementares = **complementar** da interseção:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

26. Probabilidade Condicional

- A probabilidade de que um evento B ocorra, sabendo que um evento A ocorreu é dada por:

$$\boldsymbol{P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

- Se a ocorrência do evento A não influir no cálculo da probabilidade do evento B, os eventos são ditos independentes e neste caso tem-se:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B)}$$

No último concurso da Receita Federal, a FGV apresentou o seguinte trecho:

Ana vai passar o fim de semana em sua casa de praia. A previsão do tempo diz que a probabilidade de chuva no sábado é de 30%, e a probabilidade de chuva no domingo é de 40%. Nesse caso, a probabilidade de que Ana consiga ir à praia no fim de semana sem pegar chuva é de:



Para que Ana consiga ir à praia no fim de semana, ela pode ir sábado OU domingo, ou seja, é necessário que não chova sábado OU não chova domingo, que corresponde ao complemento da interseção de chover sábado e domingo:

$$P(\overline{C_S} \cup \overline{C_D}) = P(\overline{C_S \cap C_D}) = 1 - P(C_S \cap C_D)$$

Por serem eventos independentes, a probabilidade da interseção é o produto das probabilidades. Sendo a probabilidade de chover sábado $P(CS)$ = 30% e a probabilidade de chover domingo $P(CD)$ = 40%, então a probabilidade da interseção é:

$$P(C_S \cap C_D) = P(C_S) \times P(C_D) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

E a probabilidade desejada é complementar:

$$P(\overline{C_S} \cup \overline{C_D}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 = 88\%$$

<u>Agora, no último concurso do BB, a FGV apresentou o seguinte trecho:</u>

Um dado cúbico honesto, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado 4 vezes consecutivas. Considere como resultado a sequência dos 4 números sorteados.

Assinale o número de resultados possíveis de ocorrer, de tal modo que o produto dos 4 números sorteados não seja divisível por 4.

Analisando o caso, temos:

- O número 4 não pode ser sorteado, já que é par e é divisor de 4.

- O mesmo ocorre para os números 2 e 6, se um destes números forem sorteados uma vez o outro não pode ser sorteado.

- Por fim, os números 1, 3 ou 5 podem se repetir mais de uma vez no sorteio, já que o produto entre eles não é divisível por 4.

Perceba que para cada um dos 4 lançamentos existem 3 possibilidades de números, ou seja, 1, 3 ou 5. Então, ficamos com os seguintes casos:

$$\underline{\ 3\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 3\ } = 3^4 = 81\ possibilidades$$

Agora, calculando as possibilidades de serem sorteados o número 2 ou o número 6. Note que existem apenas duas possibilidades em qualquer um dos 4 lançamentos possíveis. Já os outros 3 lançamentos só podem ocorrer de 3 maneiras distintas cada, ou seja, os números 1, 3 e 5. Dessa forma, o número de possibilidades, seria:

$4 * 2 * 3^3 = 216$ possibilidades

Logo, o número de resultados possíveis é a soma das possibilidades, veja:

81 + 216 = 297 maneiras

27. Teorema de Bayes

- Esse é um assunto bem teórico, difícil de ser explicado e bem compreendido mesmo quando temos mais tempo. Mas na prática fica bem mais simples de aplicá-lo. A



"fórmula" do teorema é a seguinte:

$$P(E_i|B) = \frac{P(E_i) \, . \, P(B|E_i)}{\sum P(E_i) \, . \, P(B|E_i)}$$

- Estranha né?! Não se preocupe, você não precisa decorá-la. Para dominar bem esse assunto, **aprenda através de alguma questão resolvida**. Se você sabe como montar aqueles "diagramas" saberá responder praticamente qualquer questão sobre Teorema de Bayes e Probabilidade Total.

28. Fatorial de um Número Natural

- Sendo n um número natural, define-se fatorial de n e indica-se $\boldsymbol{n}!$ a expressão:

$$\boldsymbol{n! = n \, . \, (n-1) \, . \, (n-2). \dots . \, 2 \, . \, 1}$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Exemplos:

- $3! \ = \ 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 6$
- $4! \ = \ 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x1 = 24$

29. Princípio Fundamental da Contagem

✓ Se um experimento pode ocorrer em várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

- $\mathbf{p_1}$ é o número de possibilidades da 1ª etapa.

- $\mathbf{p_2}$ é o número de possibilidades da 2ª etapa.



- p_n é o número de possibilidades da n-ésima etapa.

- O número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer é igual a:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

30. Princípio Aditivo

- O princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo) diz que se há m modos de tomar uma decisão D1 e, depois de tomada a decisão D1, há n modos de tomar uma decisão D2, então o total de possibilidades para tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é igual a m x n.

31. Permutação Simples

- De quantas maneiras é possível ordenar n objetos distintos?

- No caso geral, temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o objeto que ocupará o se segundo lugar,..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto, o número de modos de ordenar **n** objetos distintos é:

$$n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2). \ldots . 2 \,.\, 1 = n!$$

- Cada uma destas ordenações é chamada de permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Desta maneira $P_n = n!$.

32. Combinação Simples



- Havendo um conjunto com ***n*** elementos, o número de subconjuntos com ***p*** elementos é igual ao número de combinações de ***n*** elementos tomados ***p* a *p*** e é calculado da seguinte maneira:

$$\frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

- Existem várias notações para o número de combinações. As mais comuns são as seguintes:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

33. Permutação de Elementos Ordenados

- De uma maneira geral, se vamos permutar ***n*** elementos dos quais ***k*** deles devem estar em uma determinada ordem, o total de permutações é:

$$\frac{P_n}{K}$$



Distribuições Discretas de Probabilidade

34. Conceitos Iniciais

- Estatística Inferencial ou Inferência Estatística, que é o ramo da Estatística que nos ajuda **a tirar conclusões a respeito de um todo (que chamamos de população) a partir das observações feitas em uma parte dessa população (que chamamos de amostra)**. A inferência é uma técnica importante, pois normalmente não é possível conhecer a informação exata (por exemplo, altura, idade, salário, etc.) para toda a população.



35. Variáveis Aleatórias

- Variável aleatória (v.a.) é uma **variável que é associada a uma distribuição de probabilidade**. Ela pode assumir valores de uma maneira completamente aleatória, ou seja, não temos como prever o seu resultado. Por outro lado, podemos associar valores de probabilidade a cada um dos possíveis resultados.

✓ Uma **variável aleatória discreta** pode assumir apenas certos valores, usualmente números racionais, e resultam basicamente de contagens. Quantidade de valores possíveis é enumerável (finito ou não). Atribuímos probabilidades a resultados específicos.



✓ Uma variável aleatória contínua é aquela que resulta de uma medida e pode assumir qualquer valor dentro de um dado intervalo. Assumem qualquer valor dentro de um intervalo. Os resultados possíveis são infinitos e não enumeráveis. Não atribuímos probabilidade a resultados específicos, apenas a intervalos.

36. Esperança Matemática

- A esperança matemática (também chamada de expectância, valor médio ou média) é, por definição, o número:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \,.\, P(X_i)$$

- Esta expressão significa que, para calcular a esperança de uma variável aleatória, devemos multiplicar cada valor da variável pela sua respectiva probabilidade e depois somar tudo.

37. Variância e Desvio Padrão

- A variância de uma variável aleatória é, por definição, $\sigma 2 = E(X - \mu)^2$.

- Desenvolvendo essa expressão, temos $\sigma 2 = E(X2) - \mu^2$

38. Distribuição Uniforme Discreta

- A distribuição uniforme discreta é aquela em que todos os elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

- Em uma distribuição uniforme discreta, a **esperança é a média aritmética dos valores**.

$$E(X) = \frac{\sum X_i}{n}$$

39. Distribuição de Bernoulli

- A distribuição de Bernoulli se caracteriza pela **existência de apenas dois eventos, mutuamente exclusivos, que denominaremos de sucesso e fracasso, em um experimento que é realizado uma única vez**.

- Em resumo, a distribuição de Bernoulli **pode assumir os valores 0 e 1** (fracasso e sucesso, respectivamente) em um experimento que é realizado uma única vez.

- A probabilidade de ocorrer um sucesso é p e a probabilidade de ocorrer um fracasso é igual a q, tal que $p + q = 1$.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = pq$$

40. Distribuição Binomial

- A diferença da distribuição binomial para a distribuição de Bernoulli é que no caso anterior o experimento seria realizado apenas uma vez. Aqui **na distribuição binomial realizaremos o experimento *n* vezes**.

- Consideremos um experimento constituído por n ensaios INDEPENDENTES de Bernoulli. Cada ensaio pode resultar em um de dois eventos mutuamente excludentes.

- A probabilidade de ocorrer o resultado favorável (sucesso) em cada ensaio é p e a probabilidade de ocorrer o resultado desfavorável (fracasso) em cada ensaio é $q = 1 - p$.

✓ X é o número de sucessos em n ensaios. Assim, X é no mínimo 0 e no máximo n.

✓ X tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

✓ A probabilidade de ocorrerem k sucessos em n ensaios é:

$$\binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$

✓ A média do número X de resultados favoráveis em uma distribuição binomial é np e a variância é npq.

41. Distribuição Geométrica

- A distribuição geométrica também se refere a sucessos e fracassos, mas, diferentemente da binomial, é a probabilidade de que o sucesso ocorra exatamente no k-ésimo ensaio.

✓ Aqui, a probabilidade de ocorrer o resultado favorável (sucesso) em cada ensaio também é p.

✓ Nesta distribuição:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

42. Distribuição Hipergeométrica

- A distribuição hipergeométrica refere-se à probabilidade de, ao retirarmos, sem reposição, n elementos de um conjunto com N elementos, saiam k elementos com o atributo sucesso, considerando-se que, do total de N elementos, s possuem esse atributo e, portanto, $N - s$ possuem o atributo fracasso.

✓ **Resumindo**:

  - Temos um conjunto com N elementos dos quais s possuem o atributo sucesso e $N - s$ possuem o atributo fracasso.

  - Serão retirados n elementos do conjunto sem reposição.

  - Queremos calcular a probabilidade de obtermos k sucessos.

  - Assim, a probabilidade de obtermos um sucesso (no primeiro experimento) é igual a $p = s/N$. Queremos calcular a probabilidade de que, retirando-se n elementos, k possuam o atributo sucesso e $n - k$ possuam o atributo fracasso.

✓ Esta probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

✓ A <u>média da distribuição</u> hipergeométrica é dada por:

$$\boldsymbol{E(X) = np}$$

✓ A <u>variância da distribuição</u> hipergeométrica é dada por:

$$\boldsymbol{Var(X) = npq.\frac{N-n}{N-1}}$$

43. Distribuição de Poisson

- Para explicar essa distribuição, vamos utilizar como **exemplo** um objeto muito utilizado no cotidiano: o telefone. Talvez até sejamos capazes de dizer quantas vezes, em média, nosso telefone toca por dia. Mas quantas vezes o telefone não toca? Essa pergunta é muito difícil de responder. Quando uma variável aleatória tem um comportamento parecido com esse, dizemos que ela segue uma distribuição de Poisson.

- Se considerarmos que sucesso é tocar o telefone, é muito difícil calcular p, a probabilidade de isso ocorrer, já que não temos como calcular a não-ocorrência do evento.

- A solução é imaginar que **p** é muito pequeno ($p \to 0$), já que o toque do telefone dura apenas alguns segundos em um dia de 24 horas (86.400 segundos). Dessa forma, o número de vezes que o experimento é realizado (telefone toca ou não toca), que é o n da distribuição binomial, é realizado muitas vezes ($n \to \infty$).



✓ É assim que modelamos a distribuição de Poisson: partimos de uma distribuição binomial, considerando que p é muito pequeno (tende a zero) e que n é muito grande (tende a infinito).

A média da distribuição de Poisson é dada por:

$$\lambda = np$$

✓ Esse número λ é exatamente o número médio de vezes que o evento ocorre. No exemplo do telefone, é o número de vezes que o telefone toca por dia.

A variância da distribuição de Poisson é dada por:

$$\sigma^2 = \lambda$$

A probabilidade nessa distribuição é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

✓ Em que **e** é uma constante (número de Euler) e vale aproximadamente 2,718....

Estimação Pontual e Intervalar

44. Estimadores

Estimadores

⇒ **Média amostral** $\bar{X}$: $E(\bar{X}) = \mu$, $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

⇒ **Proporção amostral** $\hat{p}$: $E(\hat{p}) = p$, $V(\hat{p}) = \frac{p.q}{n}$, $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p.q}{n}}$

⇒ Estimador da **variância amostral:** $s^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Erro Padrão é o **desvio padrão** (raiz quadrada da variância) do estimador

45. Propriedades dos Estimadores

- Suficiente (contempla todas as informações para estimar o parâmetro populacional).
- Não Tendencioso (esperança do estimador é igual ao parâmetro populacional.
- Eficiente (menor variância possível).
- Consistente (estimativas convergem com o aumento do tamanho amostral).

46. Método de Estimação



⇒ Método dos Momentos: Resulta em $\bar{X}$ como estimador para a média; e em $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$ como estimador para a variância ($\widehat{\sigma^2}$ é tendencioso)

⇒ Método da Máxima Verossimilhança: Resulta em $\hat{p}$ como estimador para a proporção; para uma população normal, em $\bar{X}$ como estimador da média e $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$ como estimador para a variância ($\widehat{\sigma^2}$ é tendencioso)

⇒ Método dos Mínimos Quadrados: Resulta em $\bar{X}$ como estimador para a média; e em $\hat{p}$ como estimador para a proporção

47. Estimação Intervalar

Erro Máximo (**metade** da **amplitude do intervalo**)

⇒ Erro depende do nível de confiança desejado e do tamanho da amostra

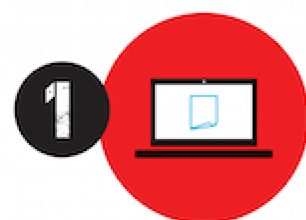
⇒ Intervalo de confiança para população com variância conhecida: $\bar{X} \pm z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

⇒ Intervalo de confiança para população com variância desconhecida: $\bar{X} \pm t_{n-1}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



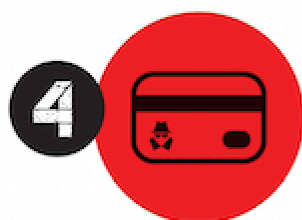
Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



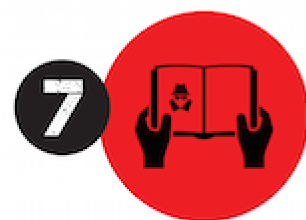
Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



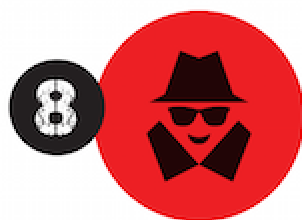
Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



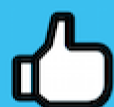
Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.